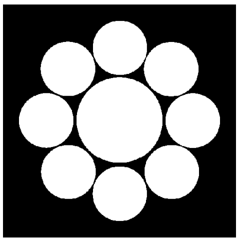
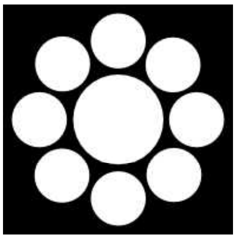
和算と九曜紋

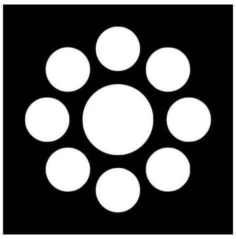
篠田通弘

大垣藩戸田氏の家紋が九曜紋であることはよく知られている。また金生山明星輪寺は明暦3年（1657年）に大垣藩主戸田氏信により祈祷所に指定され保護されていることから、同じく九曜紋を寺紋としている。九曜は妙見信仰（北極星信仰）に由来すると考えられていて、寺号の明星が虚空蔵菩薩の化身とされる明けの明星からとられていることなど、無限の宇宙（虚空）への信仰と深い関わりのある寺院である。

さて九曜紋は中央の大星を周囲を8つの小星が囲む構図で、各円は接する形のものもあれば隙間を有するものもある。

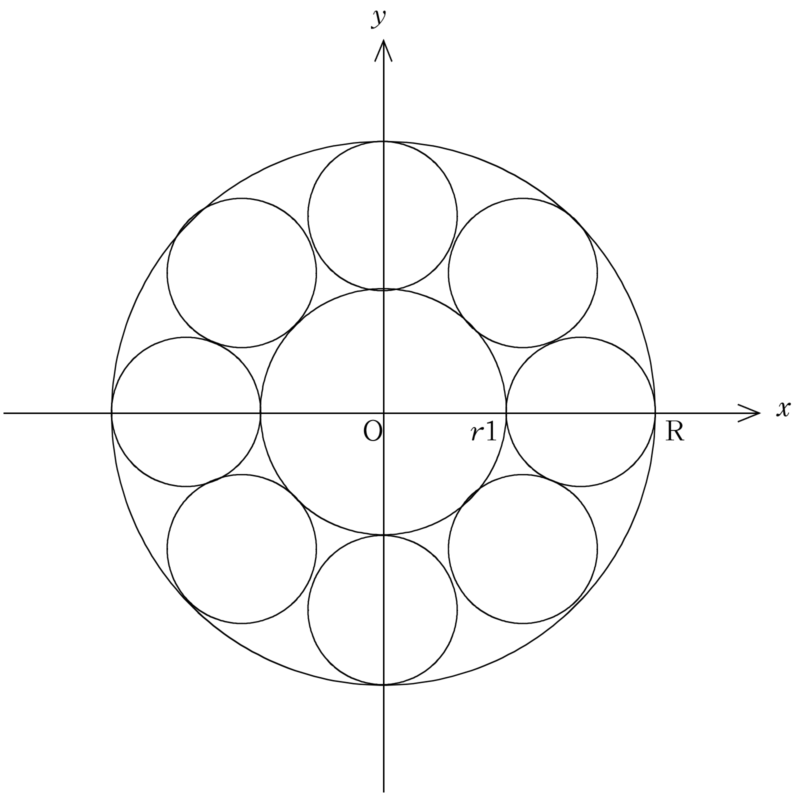




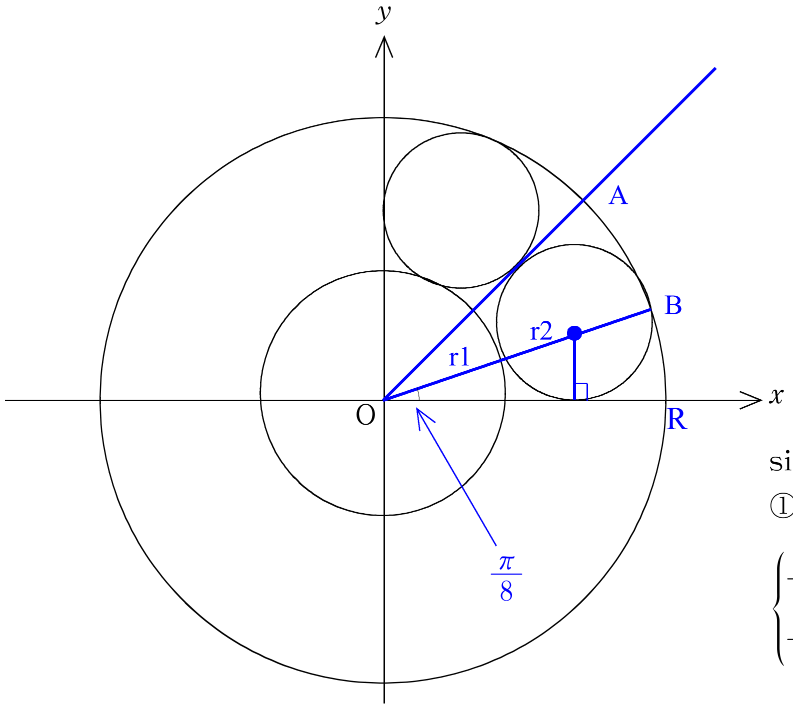


過日、明星輪寺住職冨田精運氏より「九曜の紋を描くとき各円を最大にするにはどうしたらよいか」との質問を受けた。おそらく高校数学Ⅰの問題として解くことができるのではないか、と見当をつけメモを作成した。このたび時間をとってここにまとめることができた。

和算の問題としては、富山県南砺市（旧福光町）荊波（うばら）神社に明治12年（1879年）奉納の算額に同問題がある（深川英俊、トニー・ロスマン『聖なる数学:算額』2010年）。同書では和算の基本問題として解法の概要が紹介されている。本稿は同書に屋上屋をかけることを恐れるが、高校生でも理解できるようにやや丁寧に解法を記しておきたい。なお荊波神社は式内社で『神名帳』には「ウバラノヤブナミ」とフリカナがふられている。



次頁の数式に従って作図した九曜の紋



原点Oを中心とする大円Rの半径をR、原点Oを中心とする小円rの半径をr1、大円に内接かつ小円に外接する最小の円の半径をr2とする。

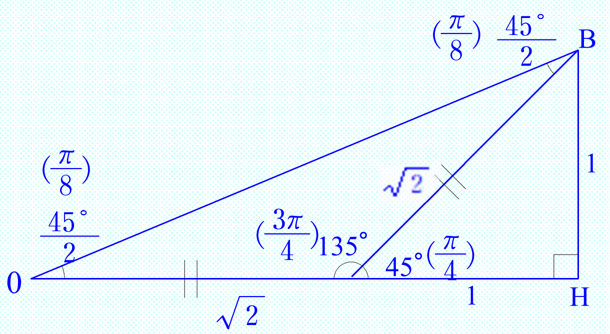
このとき、**R**、**r1**、**r2**の関係を考える。

$\angle \mathrm{AOR}=\dfrac{\pi}{4}$　であるから、$\angle \mathrm{BOR}=\dfrac{\pi}{8}$

$\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{r2}{\mathrm{R}-r2}=\dfrac{r2}{r1+r2}=k$ とおく ····· ①

①より

$$\begin{cases}\dfrac{r2}{r1+r2}=k & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\[2ex] \dfrac{r2}{\mathrm{R}-r2}=\dfrac{r2}{r1+r2} & \cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{cases}$$



左図より　$\mathrm{OB}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1^2}$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

よって $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

←関数電卓を使わずに図形的に考えると

②より $\dfrac{r2}{r1+r2}=k$

$k(r1+r2)=r2$

$kr1+kr2=r2$

$kr1=r2-kr2$

$r1=\dfrac{r2}{k}-r2$

$=\left(\dfrac{1}{k}-1\right)r2$ ····· ④

③より $\dfrac{r2}{\mathrm{R}-r2}=\dfrac{r2}{r1+r2}$

$\mathrm{R}-r2=r1+r2$

$\mathrm{R}=r1+2r2$ ····· ⑤

⑤に④を代入する

$\mathrm{R}=r1+2r2$

$=\dfrac{r2}{k}-r2+2r2$

$=\dfrac{r2}{k}+r2$

$=(\dfrac{1}{k}+1)r2$

よって、　$\mathbf{R}=(\dfrac{1}{k}+1)r2$

$r1=(\dfrac{1}{k}-1)r2$

ここで　$k=\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\fallingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{4+2.828}}=\dfrac{1}{\sqrt{6.828}}\fallingdotseq\dfrac{1}{2.613}$

$\therefore \mathrm{R}=(2.613+1)r2=3.613r2$　　　$\therefore r1=(2.613-1)r2=1.613r2$

よって、例えば$r2=10$とすると、　$\mathrm{R}=36.13$　$r1=16.13$　　終

20180801脱稿